Traženje klike u ogromnom vrlo rijetkom grafu

Vinko Petričević
vinko.petricevic@ferit.hr
http://web.math.hr/~vpetrice/radovi/

FERIT Osijek

23. veljače 2024.

Kratki uvod o multithreadingu

Bez obzira na to kako startamo proces, koliki je broj računala, procesora, threadova, . . . sljedeći će se program neovisno, radi li na nekom *malom* računalu ili velikom clusteru, podjednako brzo izvršiti:

```
#include <iostream>
using namespace std;

void radiNekiTeskiPosao(int i) {
        cout << i << endl;
}

int main()
{
        for (int i = 0; i < 100; ++i)
                radiNekiTeskiPosao(i);
        cout << "Gotovo!" << endl;
}
```

Postoji više načina kako sve te silne resurse pokušati iskoristiti u svojem izračunu.
Počevši od različitih načina kreiranja višeprocesnog okruženja, preko MPI-a, ..., ja ću sada ovdje pričati o jednopocesnom sustavu korištenjem biblioteke `pthread`, koji je (dostupan bio u prije, ali je) dio standarda `C++` od verzije `C++11`. Na taj način pojedini server – node možemo po volji opteretiti.
Iz komandne linije programe možemo (ako nije po defaultu) kompajlirati korištenjem direktiva: `-std=c++11 -lpthread`

```cpp
#include <iostream>
#include <thread>
using namespace std;
void RadiNekiTeskiPosao(int i) {
        cout << i << endl;
}

int main()
{
        thread t[100];
        for (int i = 0; i < 100; ++i)
                t[i] = thread(RadiNekiTeskiPosao, i);
        for (int i = 0; i < 100; ++i)
                t[i].join();
        cout << "Gotovo!" << endl;
}
```

Da bi prethodni program dobro ispisivao brojeve, potrebno je napraviti sinhronizaiciju. Najjednostavnoje je na sljedeći način:

```
#include <mutex>

mutex ekran;
void RadiNekiTeskiPosao(int i) {

        // nesto tesko sam izracuano, pa eto da to
        // i ispisem (ili sto vec treba)
        lock_guard<mutex> l(ekran);
        cout << i << endl;
}


// atomic...
```

Primjer

Definicija 0.1

Za skup kažemo da je $D(n)$ ako je umnožak svaka dva njegova elementa uvećan za n kvadrat.

Primjer 0.2

Postoji beskonačno mnogo brojeva n i petorki brojeva koje su $D(0)$ i $D(n)$ petorke...

Više se može pronaći u članku:

A. Dujella, M. Kazalicki, V. Petričević, *D(n)-quintuples with square elements*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM **115** (2021), Article 172, (10pp)

ili na stranici: `http://web.math.hr/~vpetrice/radovi/`.

Da bismo našli D-skup s m elemenata, prirodno je da prvo trebamo naći skupove s $m-1$ elemenata. Pa ajmo prvo pogledati što su D-parovi.

Zapravo trebamo naći $D(1)$ i $D(0)$ (racionalne) u kojem svi elementi imaju isti nazivnik, a svi brojnici su kvadrati ili $D \times \square$, gdje je D kvadratno slobodan (i prirodan).

Za neki $b \in \mathbb{N}$, da bi neki $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ bili par, mora vrijediti $\frac{Da_1^2}{b} \cdot \frac{Da_2^2}{b} + 1 = c^2$, za neki $c \in \mathbb{Q}$. Drugim riječima, treba vrijediti $(Da_1 \cdot a_2)^2 + b^2 = c^2$, za $c \in \mathbb{N}$.

Zato za fiksni b, izračunajmo sve Pitagorine trokute kojima je duljina jedne katete b. Tada je $D \cdot a_1 \cdot a_2$ druga kateta. Imamo dobro poznate formule za Pitagorine trojke

$$b = 2dkl \text{ i } Da_1 a_2 = d(k+l)(k-l),$$

za neke $k, l, d \in \mathbb{N}$, i suprotno. (k, l su relativno prosti i suprotne parnosti.)

Znači, samo trebamo naći djelitelje druge katete.

Na primjer, od Pitagorinog trokuta $(3, 4, 5)$, dobijemo parove $(\frac{1^2}{4}, \frac{3^2}{4})$, $(\frac{1^2}{3}, \frac{4^2}{3})$, $(\frac{2 \cdot 1^2}{3}, \frac{2 \cdot 2^2}{3}) \ldots (3, \frac{4^2}{3 \cdot 3^2}) \ldots$.

Implemenirali smo (jednostavni) algoritam u `C++`u. Da bismo pamtili parove, konstruirali smo graf kojem jet svaki par brid. Graf se može patmiti koristeći standardne kontejnere (npr. `map<long, set<long> > g`; pa kada su $a_1 < a_2$, a_1 i a_2 upareni, skup `g[`a_2`]` sadrži a_1). Doduše, zapravo smo koristili `unordered_map<long, vector<long> >`, koji je ponešto brži i troši manje memorije.
Za nekih 10-ak sekundi na 6-jezgrenom računalu, našla se prva petorka:

$$M = \left\{ \frac{225^2}{480480}, \frac{2548^2}{480480}, \frac{286^2}{480480}, \frac{\mathit{1408}^2}{480480}, \frac{819^2}{480480} \right\}$$

što rješavanjem nazivnika daje $D(480480^2)$-petorku s elementima koji su kvadrati.

Na primjer, ovdje imamo 10 povezanih Pitagorinih trokuta: jedan s katetama 480480 i $225 \cdot 2548$, pa s drugom katetom $225 \cdot 286$ itd.
Trokut s katetama $225 \cdot 286$ i 480480 je npr. dobiven za $(d, k, l) = (4290, 8, 7)$, dok je npr. 480480 i $819 \cdot 1408$ dobiven za $(d, k, l) = (96096, 3, 2)$.

Familije sa beskonačno mnogo $D(0)$ petorki

Uočili smo da ova petorka ima specijalnu strukturu, pa smo na tja način konstruirali više beskonačnih familija takvih petorki (kojima su brojevi ogromni).

Koristeći grubu silu, našli smo još dvije koje bi se mogle svesti pod takve familije:

$$\left\{\frac{770^2}{16336320}, \frac{1287^2}{16336320}, \frac{1700^2}{16336320}, \frac{6188^2}{16336320}, \frac{19712^2}{16336320}\right\},$$

$$\left\{\frac{7568^2}{524263740}, \frac{9947^2}{524263740}, \frac{13104^2}{524263740}, \frac{38025^2}{524263740}, \frac{96019^2}{524263740}\right\}.$$

Sve one sadrže regularnu četvorku u sebi, tj. vrijedi

$$(a+b-c-d)^2 = 4(ab+1)(cd+1).$$

Otvoreno pitanje – postoje li regularne petorke?

Nakon oko tjedan dana (na 24-jezgrenom procesoru), našla se petorka koja nema regularnu četvorku:

$$\left\{ \frac{12384^2}{1337776440}, \frac{18130^2}{1337776440}, \frac{30745^2}{1337776440}, \frac{110880^2}{1337776440}, \frac{259259^2}{1337776440} \right\}.$$

A Diophantine quintuple $\{a, b, c, d, e\}$ is called regular if

Ali je ona regularna petorka, tj. vrijedi

$$(abcde + 2abc + a + b + c - d - e)^2 = 4(ab + 1)(ac + 1)(bc + 1)(de + 1).$$

Otvoreno pitanje – postoji li petorka kojoj su svi elementi kvadrati?

Nije jasno postoji li petorka kojoj su svi elementi kvadrati. Četvorki se zna da ima beskonačno, ali u svim primjerima koje smo dobivali, uvijek je umnožak brojeva bio 1 (što bi sugeriralo da takva petorka ne postoji).

Sve dok se nije pojavila:

$$\left\{ \left(\frac{18}{77}\right)^2, \left(\frac{55}{96}\right)^2, \left(\frac{56}{15}\right)^2, \left(\frac{340}{77}\right)^2 \right\}.$$

Teško je vjerovati da petorka postoji, ali smo u potrazi (do 2^{32}), ali smo uspjevi naći npr. trojku koja se na tri različita načina proširi do četvorke:

$$\left\{(325/1368)^2, (192/235)^2, (2107/1584)^2\right\}$$
$$(9006/4141)^2,$$
$$(969/91)^2,$$
$$(530442/136955)^2.$$

Na primjer, za vrijeme takvog računa do 2^{32}, našli smo 185.334.844.330 parova, 39.523.768 trojki, 2.602.822 četvorki i 0 petorki. To je trajalo oko dana na računalu s 24 jezgre i 64BG memorije, ili oko duplo manje na 256 jezgri i 1200GB memorije.

U sljedećoj tablici je prikazan broj D-skupova kojima su svi elementi kvadrati, ovisno o broju bitova:

bitova	parova	trojki	četvorki	$\prod \neq 1$
1	0	0	0	0
2	2	0	0	0
3	36	0	0	0
4	304	30	4	0
5	1.826	74	2	0
6	11.694	438	40	0
7	66.208	1.814	150	0
8	367.406	6.718	602	0
9	1.933.004	21.890	1.884	8
10	10.120.216	67.218	5.224	4
11	51.629.808	198.640	15.042	6
12	260.053.618	561.824	41.090	8
13	1.286.435.922	1.500.724	106.708	16
14	6.303.706.328	3.879.654	265.552	22
15	30.574.089.558	9.720.264	647.902	20
16	146.846.428.400	23.564.480	1.518.622	6
17	699.322.371.508	55.600.264	3.479.904	6

Hvala na pažnji!